

Д.С. Жуков, С.К. Лямин

«Моделирование социальных и политических процессов средствами фрактальной геометрии»

Курс лекций

Направления подготовки

«Политология»,

«История»

Квалификация (степень) выпускника:

«магистр»

Форма обучения – очная

Тамбов 2013

Страница 1 из 25

Оглавление

ЧТО ОБЩЕГО МЕЖДУ ЦВЕТНОЙ КАПУСТОЙ И ПОВЕДЕНИЕМ БИРЖИ	3
ФРАКТАЛ ПОД МИКРОСКОПОМ: САМОПОДОБИЕ И МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ.....	3
ДРОБНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ.....	5
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ	6
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ.....	7
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ.....	9
ЖИЗНЬ СРЕДИ ФРАКТАЛОВ	11
АНАТОМИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ	12
ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ	14
ФРАКТАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ	20
ВАРИАНТЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНЫХ И ПОЛИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ И ПРОЦЕССОВ	21
ЛИТЕРАТУРА.....	25

ЧТО ОБЩЕГО МЕЖДУ ЦВЕТНОЙ КАПУСТОЙ И ПОВЕДЕНИЕМ БИРЖИ

Рождение фрактальной геометрии состоялось в 1982 году после выхода в свет книги Бенуа Мандельброта «The Fractal Geometry of Nature». Через 17 лет, 23 июня 1999 г. на церемонии присвоения Бенуа Мандельброту почётной степени доктора наук Университета св. Эндрюса в Шотландии главы Школы философских и антропологических исследований Университета Питер Кларк сказал: «Я не хочу, чтобы... создалось впечатление, что мы чествуем сегодня всего лишь математика. Позвольте мне объяснить, почему. Первым из его великих озарений было открытие того факта, что необычные, почти патологические, структуры, которые долго игнорировались учёными мужами, являются универсальными... Фракталы, которые он таким образом открыл и снабдил общей теорией, представлены почти повсеместно в природе... Фракталы... однажды были замечены повсюду... Они имеют место в физике – в описании необычного комплексного поведения некоторых простых материальных систем... Они имеют место в... хаотических средах. Они имеют место в экономике – в поведении цен и биржи... Они имеют место в физиологии – в росте клеток млекопитающих. И наконец, хотите верьте хотите нет, фракталы произрастают в садах. Присмотритесь, подойдя поближе, и вы увидите различие между соцветиями брокколи и цветной капусты – различие, которое может быть точно охарактеризовано лишь во фрактальной теории»¹.

Бенуа Мандельброт стал создателем новой геометрии. Он открыл дотоле неизвестный мир – поэтому ему потребовалось понятие, объединяющее новый класс явлений. «Однажды зимним днём 1975 года Мандельброт работал над своей первой монографией... Он понял, что должен найти некий термин, который стал бы стержнем новой геометрии. Одолжив у сына латинский словарь, он стал перелистывать его и наткнулся на слово *fractus*, образованное от глагола *fragere* – “разбивать”. Слово было созвучно английским *fracture* (разрыв) и *fraction* (дробь). Так Мандельброт придумал термин *fractal*, который вошёл как существительное и прилагательное в современные английский и французский языки»².

Что же такое фрактал? Исследователи до сих пор не могут прийти к единому определению этого феномена. Но человек, один раз увидевший фрактал, узнает его в любых формах, какие бы он не принимал. Можно сказать, что в самом понятии фрактала большая роль отведена интуитивному пониманию.

И, тем не менее, дефиниции существуют. В самом простом случае фрактал – это особый тип геометрической фигуры, а «фрактальный» – это характеристика структуры, явления или процесса, обладающих свойствами фрактала.

Определение фрактала, данное самим Мандельбротом, звучит так: «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому».

ФРАКТАЛ ПОД МИКРОСКОПОМ: САМОПОДОБИЕ И МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Иначе говоря, одним из атрибутов фракталов является *самоподобие*. Это означает, что

¹Цит. по: O'Connor, J.J. & Robertson, E.F. Benoit Mandelbrot // <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk> (сайт Школы математики и статистики Университета св. Эндрюса, Шотландия).

²Глейк Дж. Хаос: создание новой науки. СПб., 2001. С. 129.

небольшая часть фрактала содержит информацию обо всем фрактале³.

«Дело в том, что часто (хотя и не всегда. – Авт.) фрактал можно разбить на сколь угодно малые части так, что каждая часть окажется просто уменьшенной копией целого. Иначе говоря, если мы будем смотреть на фрактал в микроскоп, то с удивлением увидим ту же самую картину, что и без микроскопа. Это свойство *самоподобия* резко отличает фракталы от объектов классической геометрии»⁴.

Простым примером фрактала может служить гипотетическое дерево. От его ствола отходит некоторое количество ветвей. В свою очередь, от каждой из этих ветвей отходит определённое количество других, более мелких, ветвей и т.д. Мы можем проделывать эту процедуру бесконечно и получим древовидный фрактал с бесконечным количеством ветвей. При этом, каждую отдельную ветвь можно рассматривать как отдельное дерево. Но о древовидных фракталах – чуть ниже.

Таким образом, для фрактала, как правило, характерна так называемая масштабная инвариантность. В каком бы масштабе мы не рассматривали фрактал, мы всегда видим одно и то же или, во всяком случае, нечто подобное. Фрактал – это геометрическая фигура, в которой один и тот же фрагмент повторяется при каждом уменьшении масштаба.

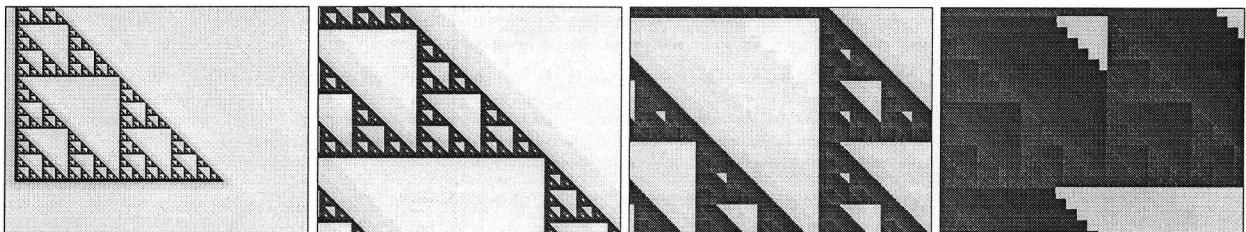


Рисунок 1. Масштабная инвариантность фрактала.

В своей фундаментальной работе «Фрактальная геометрия природы» Мандельброт указывает: «Если каждая из частей некоторой формы геометрически подобна целому, то и форма, и порождающий ее каскад называются *самоподобными*... Наиболее полную противоположность самоподобным формам представляют собой кривые, которые имеют либо только один масштаб (например, окружность), либо два четко разделенных масштаба (например, окружность, украшенная “гребнем” из множества меньших полуокружностей). Такие формы мы можем охарактеризовать как *немасштабируемые*»⁵.

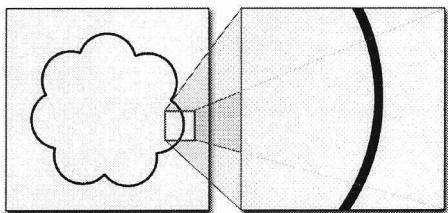


Рисунок 2. Немасштабируемая фигура.

³См.: Шабаршин А.А. Введение во фракталы // <http://www.getinfo.ru> (сайт «GetInfo.Ru – Компьютерная библиотека»).

⁴Жирков В.В. Фракталы // Соросовский образовательный журнал. Математика. 1996. № 12. С. 109.

⁵Мандельброт Б. Фрактальная геометрия Природы. М., 2002. С. 59.

Дж. Глейк следующим образом иллюстрирует масштабную инвариантность: «Характерная для них (облаков. – Авт.) беспорядочность – ее вполне можно описать в терминах фрактального измерения – совсем не меняется при изменении масштаба. Вот почему, путешествуя по воздуху, совсем не ощущаешь, насколько далеко от тебя находится то или иное облако. Даже в ясную погоду облако, проплывающее в двадцати футах от наблюдателя, может быть неотличимо от того, что находится на расстоянии, в сотню раз большем... Довольно сложно отделаться от привычки рассматривать явления, прежде всего, с точки зрения их размера и продолжительности. Однако фрактальная геометрия утверждает, что при исследовании некоторых фрагментов окружающего мира поиски присущего лишь им масштаба только отвлекают от сути»⁶.

В этом смысле, если мы утверждаем, что грандиозный смерч и ветерок, который закручивает мусор на тротуаре, – разные явления, то это значит, что мы не увидели их общей сущности. В то же время, если мы осознаём эту общую сущность, масштаб двух этих явлений теряет значение.

Однако необходимо оговориться, что некоторые фракталы могут обладать масштабной инвариантностью лишь приближенно⁷. Иначе говоря, в каждом отдельном фрагменте такого фрактала вся фигура повторяется лишь в общих чертах – с некоторыми искажениями, которые могут задаваться в соответствии с определёнными правилами или возникать хаотично. Ветка не является точной копией дерева, но мы, тем не менее, легко обнаружим сходство между веткой и всем деревом. Достаточно вспомнить, как дерево рисует ребёнок – он воспроизводит одну и ту же картинку, начиная от ствола и заканчивая самой маленькой веточкой.

ДРОБНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

Ещё одним атрибутом фрактала следует считать *дробную размерность*. Сразу обратим внимание – речь идёт о математической конструкции, а не о физической реальности. «Мы хорошо представляем себе, – поясняет В.В. Жирков, – что точка имеет размерность 0, отрезок... – размерность 1, круг... – размерность 2. С одномерными объектами мы связываем понятие длины, с двумерными – площади... (с трёхмерными – объема. – Авт.). Но как можно представить себе множество с размерностью $3/2$? По-видимому, для этого требуется нечто промежуточное между длиной и площадью, и если длину условно назвать 1-мерой, а площадь – 2-мерой, то требуется $(3/2)$ -мера. В 1919 году Ф. Хаусдорф действительно определил такую меру и... каждому множеству в евклидовом пространстве сопоставил число, названное им метрической размерностью. Он же привел первые примеры множеств с дробной размерностью»⁸.

Иначе говоря, посредством ряда математических процедур множество, которое «порождает» фрактальные фигуры, сопоставляется с определённым числом. Это число может указывать на некоторые физические свойства фракталов. Конечно же, их топологическая, привычная для восприятия, размерность останется прежней –

⁶10 Глейк Дж. Хаос: создание новой науки. СПб., 2001. С. 141 – 142.

⁷11 См.: Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Нижний Новгород. 1999, С. 7 – 8.

⁸12 Жирков В.В. Фракталы // Соросовский образовательный журнал. Математика. 1996. № 12. С. 109.

целочисленной. Но фрактальная (дробная) размерность может указывать на степень изломанности фигуры, её изогнутости в другом измерении. Обычно фрактальная размерность фигуры больше, чем её топологическая размерность⁹.

Дж. Глейк в своей знаменитой книге «Хаос: становление новой науки» пытается пояснить поднятие дробной размерности на примере наблюдений геофизика Кристофера Шольца – одного из первых последователей Мандельброта: «Шольц размышлял о классической геологической формации – об осыпи на склоне горы. С большого расстояния она кажется одной из двухмерных евклидовых форм, тем не менее, геолог, приближаясь, обнаруживает, что движется не столько по поверхности такой формы, сколько внутри неё. Осыпь распадается на валуны размером с легковую машину. Её действительная размерность составляет уже около 2,7, поскольку каменистые поверхности, загибаясь и сворачиваясь, занимают почти трёхмерное пространство, подобно поверхности губки»¹⁰.

Впрочем, и фрактальная размерность играет роль атрибута фрактала не безупречно: «В принципе фрактальная размерность показывает степень грубоści фрактала в сравнении с чистой, понятной топологической размерностью, которой обладают традиционные геометрические фигуры. Так, прямая линия имеет размерность 1, а значительно более извилистая линия морского берега от 1,15 до 1,25... Вместе с тем накопились и вопросы. Выяснилось, например, что существуют фракталы, фрактальная размерность которых определяется целым числом. Фрактальная размерность непрерывно меняется и, в принципе, может быть любой, однако пока не удалось сделать эту характеристику уникальной и использовать её для идентификации фракталов. Очень многие, совершенно разные фракталы имеют одинаковую размерность»¹¹.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Для того, чтобы представить всё многообразие фракталов, воспользуемся их общепринятой классификацией.

Обычно – по методу построения – фракталы подразделяются на **геометрические** и **алгебраические**.

Геометрические фракталы самые наглядные. Их получают с помощью некоторой ломаной линии или поверхности, называемой **генератором**. Генератор повторяется при каждом уменьшении масштаба.

Например, мы можем взять в качестве генератора фрактала графический образ заглавной печатной буквы «Н». Построение фрактала осуществляется пошагово. На каждом шаге к «концам» буквы «Н» присоединяются другие соответственно уменьшенные буквы «Н».

⁹13 Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Нижний Новгород. 1999 С. 10.

¹⁰14 Глейк Дж. Хаос: создание новой науки. СПб., 2001. С. 139.

¹¹15 Леонов А.М. Фракталы, природа сложных систем и хаос // <http://lpur.tsu.ru/Public/a0101/>

(Фракталы и циклы развития систем. Материалы пятого Всероссийского постоянно действующего научного семинара «Самоорганизация устойчивых целостностей в природе и обществе»).

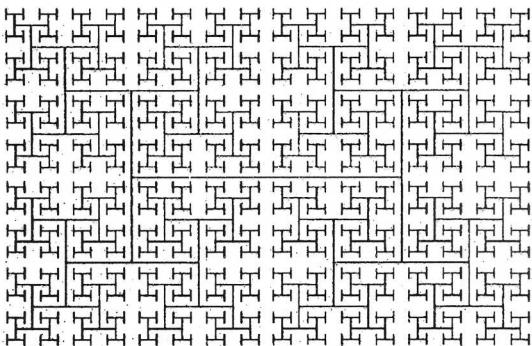


Рисунок 3. Н-фрактал.

Чем больше шагов мы проделаем, тем меньше становится размер присоединяемой буквы. Эту процедуру построения фрактала можно объяснить иначе: на первом шаге два более коротких отрезка присоединяются перпендикулярно к концам первоначального отрезка и т.д. Фигура, которая появляется – это геометрический фрактал, в котором каждая часть представляет собой подобие исходного фрактала¹². (См. рис. 7.)

Н-фрактал относится к так называемым *дендритам* (от греческого «*dendron*» – дерево). «Это название очень подходящее, потому что структура такого фрактала аналогична структуре дерева: ствол разделяется на две отдельные ветви, каждая из которых является стволов для следующих, более мелких, ветвей и т.д. Если этот процесс продолжить до бесконечности, будем иметь бесконечное число уровней»¹³.

Примеров дендритов можно привести множество (см. рис. 8 и 9.).

Рисунок 4. Двоичное дерево

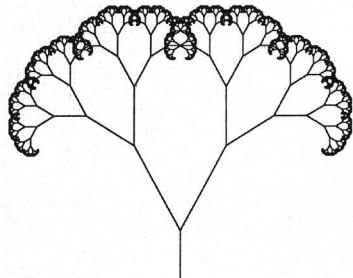
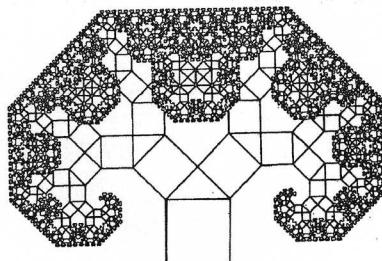


Рисунок 5. Дерево Пифагора



АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Алгебраические фракталы возникают вследствие определённых математических операций. Представьте, что некие численные результаты этих операций рассматриваются как координаты точек, которые наносятся на координатную плоскость. Из этих точек складывается фигура – фрактал. Неожиданностью для исследователей стала возможность посредством простых алгоритмов порождать очень сложные нетривиальные структуры¹⁴. Так, например, хорошо знакомая всем «цветомузыка» – сложные визуальные эффекты из популярных компьютерных плееров – создаётся именно по подобным рецептам.

¹²16 См.: Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Нижний Новгород, 1999. С. 11 – 12.

¹³17 Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Нижний Новгород, 1999. С. 13.

¹⁴18 Шабаршин А.А. Введение во фракталы (<http://www.getinfo.ru> «GetInfo.Ru – Компьютерная библиотека»)

Но алгебраические фракталы используются не только для развлечений – помимо прочего, они применяются в исследованиях динамических систем. Нелинейные динамические системы могут обладать несколькими устойчивыми состояниями. То состояние, в котором оказалась динамическая система спустя некоторое время, зависит от ее начального состояния. Поэтому каждое устойчивое состояние (аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, стартуя из которых система обязательно попадёт в рассматриваемое конечное состояние (в этот аттрактор)¹⁵.

В качестве метафоры подобного рода явлений исследователи приводят бассейн реки. Аттрактор системы здесь – устье. Начальные состояния – родники. В каком бы месте бассейна не находились родники, вода из них непременно окажется в устье. Между бассейнами разных рек существует водораздел. В устье какой реки попадёт вода того или иного родника? – это зависит от его положения относительно водоразделя. Характеристики начальных состояний и аттракторов системы можно выразить численно; эти числа можно принять за координаты точек, составляющих на координатной плоскости некую фигуру. Оказалось, что и изображения аттракторов, и изображение совокупности начальных состояний этих аттракторов («водосборных» бассейнов) во многих случаях имеют вид фракталов.

Дж. Глейк пишет по этому поводу: «Происходящее на рубеже между двумя аттракторами в динамической системе служит своего рода отправной точкой, определяющей ход множества широко известных процессов, начиная от разрушения материалов и заканчивая принятием решений. Каждый аттрактор в такой системе, подобно реке, имеет свой “бассейн”, свою “площадь водосбора”, и каждый такой “бассейн” заключен в определенные границы... [Некоторые] системы способны в конечном устойчивом состоянии демонстрировать нехаотическое поведение, но могут испытывать более одного стабильного состояния. Исследование границ фрактальных бассейнов было исследованием систем, которые способны достигнуть одного из нескольких нехаотических конечных состояний. Оно приводило к вопросу о том, как предсказать каждое из этих состояний...»¹⁶.

На рис. 6 в качестве представителя алгебраических фракталов изображён самый известный из них – так называемое построение Мандельброта, которое детальнее мы рассмотрим чуть ниже.

¹⁵19 Шабаршин А.А. Введение во фракталы (<http://www.getinfo.ru> «GetInfo.Ru – Компьютерная библиотека»)

¹⁶20 Глейк Дж. Хаос: создание новой науки. СПб., 2001. С. 296 – 297.

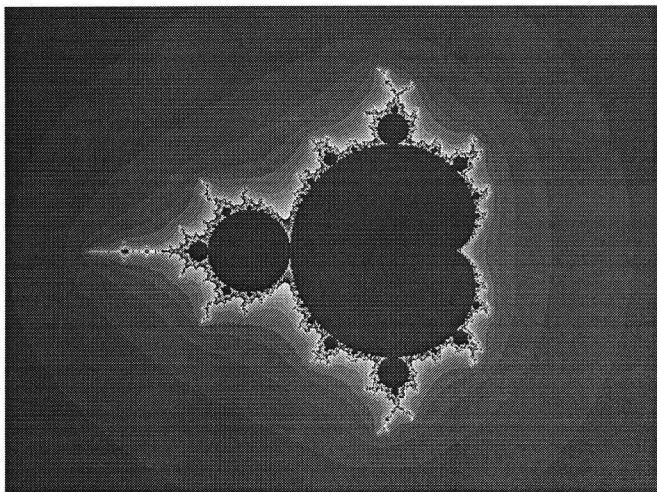


Рисунок 6. Построение Мандельброта.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Фракталы можно классифицировать и по другому основанию – по наличию элементов случайности в процедуре построения. В соответствии с этим критерием все фракталы допустимо разделять на *стохастические* (недетерминированные) и *детерминированные*. Причём, детерминированными (равно как и стохастическими) могут являться и алгебраические, и геометрические фракталы.

Стохастические фракталы, в отличие от детерминированных, содержат в себе элемент случайности. Иначе говоря, в процедуру их построения вносится некоторое возмущение. Каждый элемент детерминированного фрактала выстраивается в соответствии с одним чётко определённым и точно воспроизводящимся на каждом шаге (в каждом масштабе) правилом. В стохастическом фрактале закономерность построения не является абсолютной, ибо она сочетается с определёнными отклонениями. Но всё же закономерность существует. Стохастический фрактал возникает на границе абсолютной закономерности в духе лапласовского детерминизма и первородным хаосом. По большому счёту, эта граница – есть не что иное как весь окружающий нас мир. Именно поэтому стохастические фракталы наиболее приближены к объектам реального мира.

Сверхсложность детерминированного фрактала можно до конца разъяснить, обнаружив некий довольно простой принцип его построения. Сверхсложность стохастического фрактала разъясняется в том случае, если мы определим и закономерность его построения и меру случайных отклонений.

Вводя некоторые возмущения при построении фракталов, мы фактически переделываем детерминированный фрактал в стохастический, добиваясь максимального сходства последнего с природными объектами.

Сравним один из наиболее известных фракталов – кривую Коха (см. рис. 8), – с береговой линией, которая создана природой «совершенно случайно». Незначительное возмущение, внесённое в кривую Коха, может сделать её очень похожей на береговую линию.

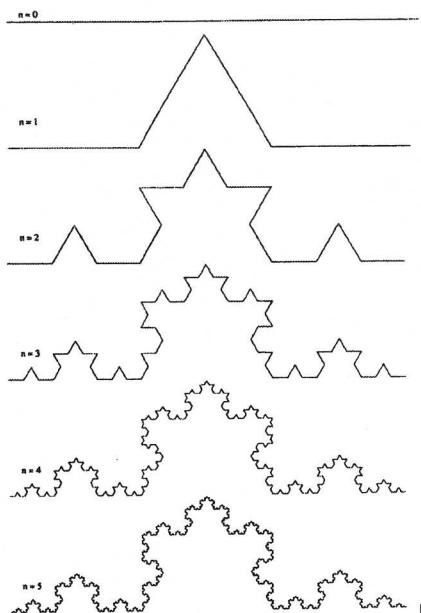


Рисунок 8. Кривая Коха

«Кривая Коха, – пишет Мандельброт, – похожа на настоящие береговые линии, однако она имеет кое-какие существенные недостатки... Ее части идентичны одна другой... Таким образом, кривую Коха можно считать лишь очень предварительной моделью береговой линии. Я разработал несколько способов избавления от этих недостатков, однако ни один из них не обходится без известных вероятностных усложнений... Многочисленные узоры, создаваемые Природой, рассматриваются на фоне упорядоченных фракталов, которые могут служить пусть и очень приблизительными, но все же моделями рассматриваемых феноменов...»¹⁷.

Итак, стохастический фрактал является более точной моделью реальных вещей, нежели классические геометрические фигуры, именуемые Мандельбротом евклидовыми.

Пафос фрактальной геометрии и заключается в том, что её построения могут служить более точными моделями реальности, чем простые треугольники, квадраты и т.п. именно потому, что во фрактальных моделях для того, чтобы обнаружить присущую природе закономерность приходится абстрагироваться от меньшего числа индивидуальных характеристик предмета. Так, фрактал-дендрит более точно воспроизводит дерево, чем треугольник, поставленный на вершину другого треугольника.

Можно привести другой пример из того же ряда. Сравните фотографию дерева и ещё один стохастический фрактал – искусственно сгенерированный фрактальный кластер.

На первый взгляд различия не существенны, не правда ли? А вот ещё одно изображение. Если Вы думаете, что это фотография настоящего листа, то Вы ошибаетесь – это искусственный фрактал.

Итак, если нам удаётся доказать, что тот или иной природный феномен является стохастическим фракталом или подобен ему, это означает, что мы можем смело утверждать наличие единообразной закономерности построения этого феномена, определяющей всю его структуру, какой бы сложной она ни была, с поправкой на некий уровень случайности. Таким образом, фрактальное мышление позволяет обнаружить закономерность в хаосе. Эта методология примиряет идеальные абстрактные схемы и иррегулярность живой природы, которые

¹⁷22 Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М., 2002. С. 67 – 68.

гармонично сочетаются в стохастическом фрактале.

Фракталы, таким образом, могут быть как «идеальными», так и статистическими, просчитываемыми на основании статистических законов, которые допускают индивидуальность и неповторимость каждого элемента системы, но выявляют типичность и закономерность групп элементов – «в среднем». Особенное и типичное, случайное и закономерное в данном случае совмещаются, но наличие особенного и случайного не означает хаос – всего лишь закономерность из линейной превращается в статистическую.

Лёгкость уподобления фракталов реальным объектам делает фрактальную геометрию способом моделирования реальности.

Иначе говоря, создав фрактальную модель объекта, мы можем с высокой точностью выявить и прогнозировать поведение реального прототипа, проводя компьютерный эксперимент с фракталом.

ЖИЗНЬ СРЕДИ ФРАКТАЛОВ

Логично возникает вопрос: насколько широка сфера применения фрактального моделирования, насколько велико число фракталоподобных структур в природе. Бенуа Мандельброт отвечает однозначно: для природы характерен именно фрактальный (и не какой другой) способ самоорганизации.

Действительно, фракталы можно увидеть в границах облаков и морских побережий, в турбулентных потоках, в трещинах, в зимних узорах на стекле и снежинках, в корнях, в листьях и ветвях растений, в тканях и органах животных, включая человека.

Вот как иллюстрирует Дж. Глейк масштаб распространения фракталов: «...В системе кровообращения поверхность с огромной площадью должна вместиться в ограниченный объем... Человеческое тело полно подобных хитросплетений. В тканях пищеварительного тракта одна волнистая поверхность “встроена” в другую. Легкие также являются примером того, как большая площадь “втиснута” в довольно маленькое пространство... Фрактальный подход,... предполагает рассмотрение структуры как целого через разветвления разного масштаба... Не сразу, а лишь десятилетие спустя после того, как Мандельброт ознакомил читающую публику со своими взглядами на физиологию, некоторые биологи-теоретики стали находить, что фрактальная организация лежит в основе устройства всего человеческого тела. Выяснилось, что и мочевыделительная система фрактальна по своей природе, равно как желчные протоки в печени, а также сеть специальных мышечных волокон, которые проводят электрические импульсы к сократимым мышечным клеткам сердца... С точки зрения Мандельброта,... фракталы, разветвляющиеся структуры, до прозрачности просты и могут быть описаны с помощью небольшого объема информации. Возможно, несложные преобразования, которые формируют фигуры (наподобие дендритов. – Авт.), заложены в генетическом коде человека. ДНК, конечно же, не может во всех подробностях определять строение бронхов, бронхиол, альвеол или пространственную структуру дыхательного “древа”, однако она в состоянии запрограммировать повторяющийся процесс расширения и разветвления – а ведь именно таким путем природа достигает своих целей... Мандельброт естественным образом переключился с изучения “древа” дыхательного и сосудистого на исследование самых настоящих деревьев, которые ловят солнце и противостоят ветрам, деревьев с фрактальными ветвями и листьями. А биологи-теоретики начали подумывать о

том, что фрактальное масштабирование не просто широко распространенный, но универсальный принцип морфогенеза. Они утверждали, что проникновение в механизмы кодирования и воспроизведения фрактальных моделей станет настоящим вызовом традиционной биологии»¹⁸.

В силу того, что фракталы широко представлены в природе, методы фрактальной геометрии проникли и продолжают проникать (в чём может убедиться читатель этой книги) в разные (если не во все) научные дисциплины. «Фракталы имеют чрезвычайно обширные и разветвлённые корни, которые во многих случаях проложили себе путь в многочисленные области знания»¹⁹.

Фракталы находят применение в компьютерном дизайне, в алгоритмах сжатия информации, в биологии, экономике, в физике, метеорологии, в геологии и т.д. Сфера применения фракталов еще до конца не исчерпана. Потенциал этой методологии, по мысли Мандельброта, огромен: «...Я задумал и разработал новую геометрию Природы, а также нашел для нее применение во многих разнообразных областях. Новая геометрия способна описать многие из неправильных и фрагментированных форм в окружающем нас мире и породить вполне законченные теории, определив семейство фигур, которые я называю фракталами»²⁰.

АНАТОМИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ

Рассмотрим более подробно, что представляют собой геометрические фракталы. Традиционно в литературе, посвящённой фракталам, описание геометрических фракталов начинается с примера триадной кривой Коха – линии, названной по имени шведского математика Хельга фон Коха, впервые описавшего этот феномен в 1904 году. Кривая Коха выглядит следующим образом – см. рис. 9.

¹⁸23 Глейк Дж. Хаос: создание новой науки. СПб., 2001. С. 142 – 146.

¹⁹24 O'Connor, J.J. and Robertson E.F. Benoit Mandelbrot // <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/> (сайт Школы математики и статистики Университета св. Эндрюса, Шотландия). См. также: Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. М. – Ижевск, 2001; Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. М., 2000; Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск, 2001.

²⁰25 Мандельброт Б. Фрактальная геометрия Природы. М., 2002. С. 13.

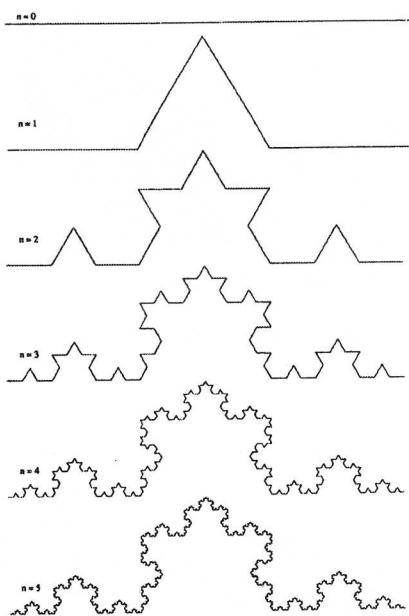


Рисунок 9. Кривая Коха.

Построение кривой Коха, как и любого геометрического фрактала, начинается с так называемого инициатора. В данном случае инициатором является отрезок единичной длины. Это нулевое поколение кривой Коха. Построение кривой Коха продолжается: инициатор мы заменяем так называемым генератором, обозначенным на рис. 16 через $n = 1$. В результате такой замены мы получаем 1-е поколение – кривую из четырех прямолинейных звеньев, каждое длиной по $1/3$ от единичного отрезка. Длина всей кривой 1-го поколения составляет величину $4/3$. Следующее поколение получается при замене каждого прямолинейного звена первого поколения уменьшенным генератором. В результате мы получаем кривую 2-го поколения, состоящую из 16 звеньев. Проделав ту же самую операцию несколько раз, мы можем получить кривую 3, 4, 5 и т.д. поколений. Теоретически эту операцию можно проделывать бесконечно – в результате мы получим кривую бесконечной длины. Нетрудно убедиться, что при изменении масштаба рассмотрения этой кривой её вид будет оставаться прежним.

Аналогичным способом строится снежинка Коха. Инициатором в данном случае является равносторонний треугольник, а генератором – тот же самый элемент, что и в предыдущем примере.

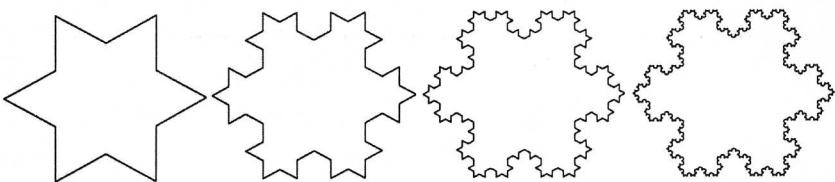


Рисунок 10. Рост снежинки Коха.

В первом поколении мы получим звезду Давида. Повторим эту операцию, прикрепив еще меньший треугольник к средней трети каждой из двенадцати сторон звезды. Если проделывать эту процедуру вновь и вновь, число деталей в образуемом контуре будет расти и расти. Изображение приобретает вид снежинки с геометрически идеальными очертаниями.

Дж. Глейк указывает на некоторые парадоксальные, на первый взгляд, свойства снежинки

Коха: «Прежде всего, она представляет собой непрерывную петлю, никогда не пересекающую саму себя, так как новые треугольники на каждой стороне всегда достаточно малы и поэтому не сталкиваются друг с другом. Каждое преобразование добавляет немного пространства внутри кривой, однако ее общая площадь остается ограниченной и фактически лишь незначительно превышает площадь первоначального треугольника. Если описать окружность около последнего, кривая никогда не растягивается за ее пределы. Но все же сама кривая бесконечно длинна, так же как и евклидова прямая... Подобный парадоксальный итог – бесконечная длина в ограниченном пространстве – в начале XX века поставил в тупик многих математиков. Кривая Коха оказалась монстром, безжалостно поправшим все мыслимые интуитивные ощущения относительно форм»²¹.

Впоследствии математики создали иные формы, которым были присущи странные черты кривой Коха. Однако использовались другие инициаторы и генераторы.

Например – решето Серпински. См. рис. 18. Для построения «решета» нужно взять равносторонний треугольник и вписать в него соответственно уменьшенный и перевёрнутый треугольник, а затем в крайние из получившихся треугольников вписать новые перевёрнутые и уменьшенные треугольники и т.д.

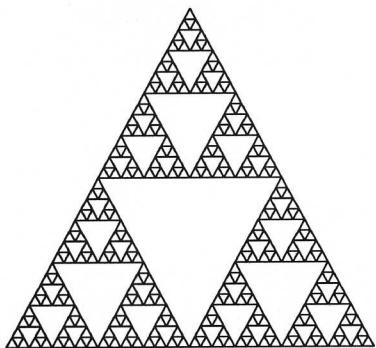


Рисунок 11. Решето Серпински.

Фрагменты фрактала могут повторять генератор не только в уменьшенном масштабе, но и с другими изменениями (поворот, сжатие, отражение), при том условии, что эти изменения также чётко определены и одинаковы для всех элементов и во всех масштабах.

ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ

Для того, чтобы понять принцип построения алгебраических фракталов, необходимо иметь самые общие представления о том, что такое комплексные числа, комплексная плоскость и итерационный процесс.

1. Комплексные числа

Любое комплексное число состоит из двух частей – действительной и мнимой. Действительная часть представляет собой действительное число («обыкновенное», привычное число – отрицательное или положительное, целое или дробное). Действительную часть обычно обозначают литерой d . Мнимая часть комплексного числа представляет собой произведение коэффициента k на мнимое число i . Коэффициент k является действительным числом. i – это квадратный корень из -1 ; иными словами $i^2 = -1$.

²¹26 Глейк Дж. Хаос: создание новой науки. СПб., 2001. С. 130 – 131.

Можно сказать, что комплексные числа – это обобщение понятия числа. Ибо действительное число можно представить как частный случай комплексного числа с коэффициентом $k=0$.

Комплексные числа, таким образом, имеют вид $a+bi$. Они удобны для многих математических расчётов, поскольку содержат корни из отрицательных чисел, которые, вопреки нашим школьным воспоминаниям, всё-таки существуют. Комплексные числа можно было бы воспринимать как слишком вольную математическую фантазию, если бы они не использовались во многих отраслях знания, имеющих практическое применение, – например, электротехника, теория упругости, аэродинамика и многие другие.

С комплексными числами можно выполнять все те же самые действия, что и с действительными, но при соблюдении специфических правил. Например, при сложении комплексных чисел мнимая часть складывается с мнимой, а действительная – с действительной; в результате чего получается опять-таки число, состоящее из двух частей.

2. Комплексная плоскость

Если мы возьмём комплексное число и значения действительной и мнимой частей представим как значения по оси x и по оси y в системе координат, то комплексное число мы сможем уподобить точке. Её координаты по оси x будут равны действительной части, а по оси y коэффициенту b мнимой части. Комплексные числа, изображённые таким образом в системе координат, образуют комплексную плоскость.

3. Итерация

Итерация в самом общем смысле – это результат применения какой либо математической операции, получающейся в серии аналогичных математических операций. Представьте, что вы вычисляете значение y по выражению $y=2x$. Вы подставляете первое значение x – например 1; получаете значение $y=2$. На следующем этапе Вы в качестве x подставляете 2 (значение y , вычисленное на предшествующем этапе). Получаете новый $y=4$. Теперь, на третьем этапе, в исходную формулу в качестве x подставляется значение y , рассчитанное на втором этапе, и получается новое значение $y=8$. Этот процесс можно продолжать бесконечно, он называется итерационным процессом. Каждый этап вычисления («подстановка») называется итерацией. Таким образом, результатом процесса итерирования является череда чисел.

4. Построение Мандельброта

Построение Мандельброта производится на комплексной плоскости с помощью формулы $Z_{n+1} = (Z_n)^2 + C$. В этой формуле Z и C являются комплексными числами, то есть точками на комплексной плоскости. Построение Мандельброта – это множество точек на комплексной плоскости, которые получаются в результате итерационного процесса. Однако в построение Мандельброта входят не все точки комплексной плоскости, которые участвуют в итерационном процессе.

Возникает логичный вопрос: какие точки комплексной плоскости входят в построение Мандельброта, а какие – нет.

Мы можем наложить на комплексную плоскость своего рода решётку, в узлах которой будут размещаться точки. Квадратные ячейки этой решётки могут быть больше, могут быть меньше, а значит и количество точек может быть больше или меньше в некотором

ограниченном квадрате на комплексной плоскости (например, мы можем взять часть плоскости, ограниченную значениями от -2 до 2 по оси x и от -2 до 2 по оси y). Итак, наложив на этот ограниченный участок плоскости решётку с определённым размером ячеек, мы получим определённую совокупность точек. Так, если мы возьмём решётку с размером ячейки 0,2, то мы получим совокупность четырёхсот точек в указанном ограниченном периметре.

С этими точками мы и будем работать.

Возьмём точку с координатами $(1,8; 1,8)$. Она соответствует комплексному числу $1,8+1,8i$. Подставим это значение в качестве C в формулу $Z_{n+1} = (Z_n)^2 + C$, при этом $Z_1 = 0$. По формуле вычислим Z_2 . Это была первая итерация. Проведём вторую итерацию: подставим Z_2 в формулу, возведём его в квадрат, прибавим C (то есть начальное число $= 1,8+1,8i$) и получим таким образом Z_3 , которое во время следующей итерации подставим в ту же самую формулу, чтобы получить Z_4 . Проделаем таким образом значительное число итераций – например, 300 – и получим на последней итерации комплексное число Z_{300} . Теперь проанализируем это число. Если значение его действительной и мнимой частей больше 2 или меньше -2, то точка лежит за пределами обозначенного нами периметра. В этом случае исходную точку C со значениями $(1,8; 1,8)$, которую мы использовали в процессе итерации, закрасим в белый цвет. Если значение действительной и мнимой частей числа Z_{300} меньше 2 и больше -2, то точка Z_{300} лежит в пределах обозначенного нами периметра. В этом случае исходную точку C со значениями $(1,8; 1,8)$, закрасим в чёрный цвет.

Проделаем те самые триста итераций с каждой из четырёхсот исследуемых нами точек и в зависимости от конечных результатов трёхсот итераций закрасим четыреста точек с исходными значениями в чёрный или белый цвет. Получившаяся фигура считается одним из самых революционных открытий XX века.

Нетрудно заметить, что чем мельче ячейки налагаемой решётки, тем детальнее прорисовка этого построения. Увеличивая детальность прорисовки, мы получаем возможность приблизиться к построению, рассмотреть его под микроскопом – увидеть его в разных масштабах. Когда Мандельброт с помощью компьютера в лаборатории IBM проделывал все эти манипуляции с крайне мелкой решёткой, он обнаружил картины, фантастической сложности и красоты.

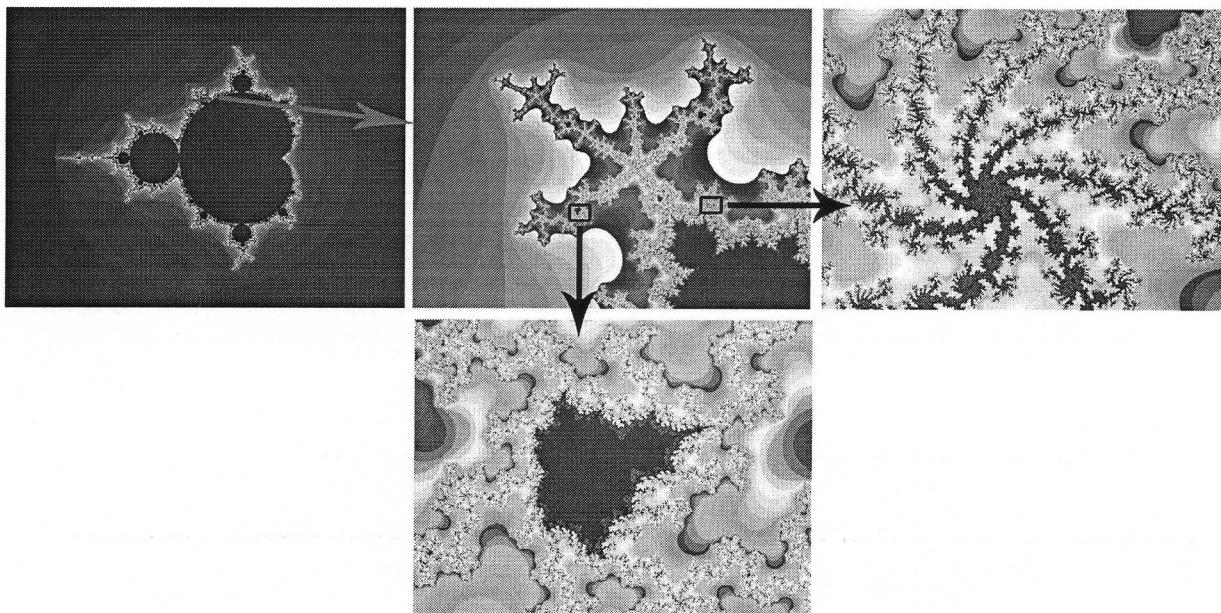


Рисунок 12. Построение Мандельброта.

Компьютерная программа, воспроизводящая построение Мандельброта, нуждается в некоторых пояснениях. Точки, входящие в построение, могут быть обозначены черным цветом, а не принадлежащие к построению – белым. Для получения более колоритного изображения белый цвет можно заменить другими цветами. В частности, если итерационный процесс прекращается после десяти повторений (то есть после 10 итераций конечная точка покидает пределы ограниченного периметра), программа должна выдать красную начальную точку, после двадцати – оранжевую, после сорока – желтую и т.д. Выбор цветов и момент остановки расчета точек исследователь может выбрать сам.

Дж. Глейк с присущей ему метафоричностью так описывает построение Мандельброта: «Множество [построение] Мандельброта, как любят повторять его почитатели, является наиболее сложным объектом во всей математике. Чтобы увидеть его полностью – круги, усыпанные колючими шипами, спирали и нити, завивающиеся наружу и кругом, с выпуклыми пестрыми молекулами, висящими, словно виноградины на личной лозе Господа Бога, – не хватит целой вечности... Однако, как это ни парадоксально, для передачи полного описания системы по линии связи хватит нескольких десятков кодовых символов, а в компьютерной программе содержится достаточно информации, чтобы воспроизвести систему целиком. Догадавшиеся первыми, каким образом в системе смешиваются сложность и простота, были застигнуты врасплох – даже сам Мандельброт. Система превратилась в эмблему хаоса для широкой публики. Она замелькала на глянцевых обложках тезисов конференций и инженерных журналов и сделалась украшением выставки компьютерного искусства, показанной во многих странах в 1985 – 1986 годах. <...> На грубо набросанной координатной сетке, где несколько раз повторялась петля обратной связи (итерационный процесс. – Авт.), возникли первые контуры кругов или дисков... Справа и слева от главных дисков появлялись иные неясные очертания. Как позже вспоминал сам Мандельброт, воображение нарисовало ему нечто большее – целую иерархию форм, где от атомов, словно ростки, отпочковываются все новые и новые атомы, и так до бесконечности... Вскоре он обнаружил некие включения, собирающиеся по краям дисков и “плававшие” в близлежащем пространстве... Отростки и завитки медленно отделились от основного островка, и возникла кажущаяся однородной граница, которая распадалась на цепочку спиралей, напоминавших хвосты морских коньков. <...> Если бы [построение] было просто фрактальным..., тогда каждое последующее изображение (при изменении масштаба. – Авт.)

более или менее походило бы на предыдущее. Принцип внутреннего подобия при различных масштабах позволил бы предугадать, что мы увидим в электронный микроскоп на следующем уровне увеличения. Вместо этого каждый взгляд в глубины системы Мандельброта приносил все новые сюрпризы. Мандельброт, желая применить свой термин “фрактал” к новому объекту, начал беспокоиться о том, что определил это понятие слишком узко. При достаточном увеличении выяснилось, что система приблизительно повторяет свои же элементы – крошечные, похожие на жучков объекты, отделявшиеся от основной формы. Однако, еще более увеличив изображение, исследователь убеждался, что эти молекулы не во всем соответствуют друг другу, всегда появлялись новые формы, похожие на морских коньков или на вьющиеся ветви оранжерейных растений. Фактически ни один фрагмент системы точно не походил на другой при любом увеличении. <...> Каждая плавающая молекула на самом деле “висит” на филигранной нити, которая связывает ее с другими молекулами. В итоге получается хрупкая паутинка, ведущая от крошечных частиц к основному объекту, – “дьявольский полимер”, говоря словами Мандельброта. Математики доказали, что в каждом сегменте – не имеет значения, где он находится и насколько он мал, – при увеличении “компьютерным микроскопом” обнаружатся новые молекулы, каждая из которых будет напоминать систему в целом и одновременно чем-то отличаться от нее. Каждая новая молекула будет обладать собственными спиралью и выступающими частями, похожими на языки пламени, и в них также неизбежно обнаружатся новые молекулы, еще меньшие, такие же бесконечно разнообразные, всегда подобные, но никогда – полностью идентичные. Это можно назвать чудом миниатюризации: каждая новая деталь является вселенной, цельной и многогранной»²².

Построение Мандельброта – не единственный алгебраический фрактал. Изменяя итерируемую формулу, мы можем получить бесчисленное количество фрактальных форм. Впервые множества, порождающие фракталы, были открыты и изучены еще во время Первой мировой войны французскими математиками Гастоном Джулиа и Пьером Фато, работавшими без каких бы то ни было компьютерных изображений. Однако лишь Мандельброт смог обобщить предшествующие работы и заново осмыслить их значение. Можно сказать, что Мандельброт является действительно создателем фрактальной геометрии.

Открытие Мандельброта изменило само представление об исследовании функций и построении фигур на их основе. Тот же Дж. Глейк так описывает революционную сущность фрактальной геометрии: «...В отличие от традиционных геометрических форм, таких как окружности, эллипсы и параболы, система Мандельброта не допускает никаких сокращенных вариантов. Определить, какая форма подходит к каждому конкретному уравнению, удается только методом проб и ошибок. Именно он привел исследователей к неизведанным землям, скорее путем Магеллана, чем дорогой Евклида. Такое объединение вселенной форм с миром чисел говорило о разрыве с прошлым. Новые геометрии всегда начинаются с того, что кто-нибудь пересматривает базовый постулат. Предположим, говорит ученый, что пространство определенным образом искривлено, – и в результате получается странная пародия на Евклида, геометрия Римана-Лобачевского, которая стала основой общей теории относительности. Дальше – больше... Допустим, что пространство может иметь четыре измерения, пять или даже шесть... Вообразим, что число, выражющее измерение, может представлять собой дробь... Представим, что геометрические объекты можно закручивать, растягивать, завязывать узлами... Пусть их можно определить не решением определенного уравнения, а итерацией его с помощью петли обратной связи

²²28 Глейк Дж. Хаос: создание новой науки. СПб., 2001. С. 281 – 291.

(выделено нами. – Авт.). Джулиа, Фато,... Мандельброт – все эти математики изменили правила создания геометрических форм. Картезианский и Евклидов методы превращения уравнений в кривые знакомы любому, кто изучал геометрию в средней школе или находил точку на карте по двум координатам. В стандартной геометрии кроме уравнения необходим также и набор чисел, которые ему удовлетворяют, тогда решения уравнения вроде $x^2 + y^2 = 1$ образуют форму (в системе координат. – Авт.), в данном случае – окружность. Другим простым уравнениям соответствуют иные фигуры: эллипсы, параболы... Но когда геометр прибегает к итерации вместо того, чтобы решать уравнение, последнее преобразуется из описания в процесс, из статического объекта в динамический (выделено нами. Иначе говоря, в итерируемом уравнении заключён не результат взаимосвязи некоторых факторов, а процесс их взаимодействие. – Авт.). Подставив исходное число в уравнение, мы получим новое число, которое, в свою очередь, даст еще один результат, и так далее. Соответствующие им (числам. – Авт.) точки перепрыгивают с места на место. Точка наносится на график не тогда, когда она удовлетворяет уравнению, а тогда, когда она генерирует определенный тип поведения (выделено нами. – Авт.). При этом один из них может представлять собой устойчивое состояние, а другой – неуправляемое стремление к бесконечности»²³.

Бешеная мушка в фазовом пространстве

Конструирование алгебраических фракталов позволяет моделировать процессы в фазовом пространстве. Фазовое пространство – теоретический конструкт. Каждая из точек фазового пространства имеет одну или несколько координат – в зависимости от числа измерений фазового пространства. Фазовое пространство применяется при исследовании динамических систем, их начальных состояний, их эволюции и их атTRACTоров. В этом пространстве все данные о динамической системе в каждый момент времени представляются одной точкой. Если в следующий момент система претерпит изменения, то точка, представляющая её в фазовом пространстве, изменит своё местоположение. Движение точки можно изобразить в виде линии в фазовом пространстве, которая свидетельствует о характере изменения системы.

Каким образом данные о сложной системе могут быть представлены лишь одной точкой? Если система характеризуется лишь двумя переменными, то значение одной из переменных располагается на оси x , а значение другой – на оси y . В данном случае мы имеем дело с двухмерным фазовым пространством. Для изображения системы, характеризующейся тремя переменными, нам потребуется уже трёхмерное фазовое пространство и т.д.

Дж. Глейк следующим образом характеризует изображение динамической системы в фазовом пространстве: «Система, в которой переменные непрерывно увеличиваются и уменьшаются, превращается в движущуюся точку, словно муха, летающая по комнате. Если некоторые комбинации переменных никогда не возникают, учёный может просто предположить, что пределы комнаты ограничены, и насекомое никогда туда не залетит. При периодическом поведении изучаемой системы, когда она вновь и вновь возвращается к одному и тому же состоянию, траектория полёта мушки образует петлю, и насекомое минует одну и ту же точку в пространстве множество раз. Своебразные портреты физических систем в фазовом пространстве демонстрировали образцы движения, которые были недоступны наблюдению иным способом... Учёный, взглянув на фазовую картину, мог... уяснить сущность самой системы: петля здесь соответствует периодичность там, конкретный

²³29 Глейк Дж. Хаос: создание новой науки. СПб., 2001. С. 286 – 288.

изгиб воплощает определённое изменение, а пустота говорит о физической невероятности...»²⁴.

Фазовое пространство – это удобный инструмент изучения аттракторов. Аттракторам присуще важнейшее качество – устойчивость. Самые простые аттракторы можно изобразить в фазовом пространстве фиксированными точками или замкнутыми кривыми. Подобные аттракторы описывают поведение таких систем, которые достигли устойчивого состояния или непрерывно себя повторяют.

В фазовом пространстве мы также может обозначить начальные условия системы – точку, из которой она стартует. Каждый из аттракторов системы (а их может быть несколько) имеет собственную область начальных условий в фазовом пространстве.

Построение алгебраического фрактала можно рассматривать как исследование поведения системы в фазовом пространстве. Так, например, в построение Мандельброта не входят точки, имеющие аттрактор в бесконечности, а входят только те точки, которые имеют аттрактор внутри обозначенного периметра комплексной плоскости.

Итерируемая формула описывает поведение точки – то есть системы. Формула генерирует череду чисел, значения которых отображают траекторию системы в фазовом пространстве. Сам фрактал можно рассматривать, например, как совокупность всех возможных начальных условий системы, из которых она попадёт в тот или иной аттрактор.

Таким образом, фрактальное моделирование позволяет исследовать и репрезентовать поведение динамических систем.

ФРАКТАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Уже упоминалось, что фракталы могут быть не только пространственными, но и временными. Иначе говоря, существуют не только фрактальные фигуры, но и фрактальные процессы. Классический пример фрактального процесса – броуновское движение частиц. Если по оси у мы будем откладывать движение броуновской частицы условно вверх и условно вниз, а по оси x – время движения; то мы получим модель фрактального, стохастического процесса.

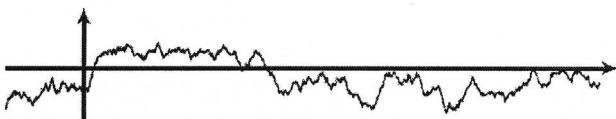


Рисунок 13. Броуновская кривая.

«Создавая свою геометрию, – пишет Дж. Глейк, – [Мандельброт] выдвинул закон о неупорядоченных формах, что встречаются в природе. Закон гласил: степень нестабильности постоянна при различных масштабах. Справедливость этого постулата подтверждается вновь и вновь. Мир снова и снова обнаруживает устойчивую неупорядоченность»²⁵. В этом смысле степень неупорядоченности броуновской кривой одинакова во всех её масштабах. Это особенность подобных кривых позволяет с помощью инструментария фрактальной геометрии, предсказывать процессы, на первый взгляд, кажущиеся неупорядоченными.

²⁴30 Глейк Дж. Хаос: создание новой науки. СПб., 2001. С. 179.

²⁵36 Глейк Дж. Хаос: создание новой науки. СПб., 2001. С. 129.

Таким образом, фрактальным (в пространстве) структурам соответствуют фрактальные (во времени) процессы – многомерные, сложные многоволновые циклы, спирали и т.п. Фрактальность процессов становления и эволюции тех или иных систем позволяет предположить, что это следствие (отголосок, а может быть – причина) того факта, что эти системы фрактальны по своей природе.

ВАРИАНТЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНЫХ И ПОЛИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ И ПРОЦЕССОВ

Фрактальные модели позволяют обнаружить закономерность и стройную упорядоченность в таких системах, где, казалось бы, царит абсолютный хаос разнонаправленных человеческих устремлений и многообразных эмпирических фактов – фрактальная геометрия объединяет их, не укладывая, вместе с тем, в прокрустово ложе простейших схем. В рамках фрактальной методологии мы выделим несколько способов моделирования, применимых к социальным и политическим процессам и явлениям.

Во-первых, построение алгебраического фрактала можно рассматривать как исследование поведения нелинейной динамической системы в фазовом пространстве. Итерируемая формула (своего рода «генетический код» фрактала) генерирует череду чисел и, тем самым, задаёт траекторию точки, то есть поведение системы, в фазовом пространстве. Совокупность некоторых точек фазового пространства, которые являются стартовыми позициями (начальными состояниями), из которых система «втягивается» в тот или иной аттрактор, обычно обозначается как бассейн аттрактора. Аттракторы и их бассейны в фазовом пространстве во многих случаях имеют вид фрактала. Таким образом, сделав математическое описание взаимодействия ряда факторов системы, можно с высокой долей вероятности, предсказывать возможные итоги её развития. [8, с. 52]. Компьютерная программа-фракталопостроитель в этом случае может генерировать изображения аттракторов системы (мы условно называем эти изображения «пространством перспектив») и бассейнов («пространство потенциалов»).

В ходе исследований в Центре фрактального моделирования авторами были разработаны математическая модель, описывающая процессы модернизации городской социальной среды и менталитета горожан в пореформенной России («Менталофрактал»), а также модель демографического поведения аграрного населения Центральной России второй половины XIX – начала XX вв. («Демофрактал»). Обе модели используют схожий математический аппарат, поскольку должны имитировать типологически схожие процессы форсированной модернизации. В обоих случаях итерируемая формула аналогична той, которая используется для построения Фрактала Мандельброта, однако алгоритм генерирования значительно отличается. «Многофункциональность» формулы Мандельброта объясняется её относительной простотой и, очевидно, универсальностью как инструмента описания процессов самоорганизации.

Математический аппарат «Менталофрактала» и «Демофрактала» содержит итерируемую формулу $Z_{n+1} = Z_n^2 A + C$, (где Z и C – комплексные числа), а также ряд математических условий, которые позволяют отождествить геометрический смысл операций над комплексными числами с результатами нуклеарных взаимодействий факторов модели. Таким образом, модель в целом приобретает способность симулировать линейные и

нелинейные процессы, возникающие в результате краткого и (или) долгосрочного взаимодействия ряда факторов.

Во-вторых, построение стохастических фракталов, посредством введения элементов случайности, позволяет имитировать реальные феномены. Подобные фракталы будут отображать результаты процессов, которые сочетают в себе элементы закономерности и случайности. К числу таких процессов относятся практически все социальные процессы, описываемые статистическими законами. Стохастические фракталы отличаются от детерминированных именно способностью симулировать индивидуальность и неповторимость каждого элемента системы. Однако внесение случайных отклонений в процедуры построения фракталов не отменяет определённых закономерностей для групп элементов «в среднем».

Мы применили подобный метод моделирования для изучения формирования модернизированных социальных слоёв под воздействием результатов модернизационного давления государства на городские общества во второй половине XIX века. Компьютерная программа «Имитация» формировала фрактальный кластер, конфигурация которого имитировала взаимодействие следующих факторов: сила модернизационного нажима, инерция (сила сопротивления) традиционного общества, величина объекта модернизационного нажима, количество модернизационных мероприятий. Графические результаты работы программы могут быть интерпретированы как некоторые итоги исторического процесса модернизации. Стохастическая природа этой модели приводит к тому, что при разных запусках программы с одними и теми же параметрами вид получившегося фрактала может быть различным. Но качественные характеристики (величина, «степень разветвлённости» и др.) одинаковы, поскольку выражают статистические закономерности.

В чём эвристическая ценность имитационной модели? Такая модель позволяет выявить потенциал развития ситуации. Вводя разные значения параметров, мы получаем разные результаты. Каждый конкретный кластер, взятый изолированно, практически не содержит нового знания, однако в этом кластере демонстрируется взаимосвязь исследуемых факторов, и поэтому череда кластеров позволяет сравнить результаты изменения как одного, так и нескольких факторов. Вид получившегося фрактала изменяется в зависимости от комбинации численных выражений факторов и свидетельствует, в частности, об эффективности модернизационного нажима и о степени целостности и связанности модернирующего общества. Причём, степень эффективности модернизационного нажима может быть определена путём сопоставления ряда полученных изображений.

Программное обеспечение для реализации моделей «Менталофрактал», «Демофрактал», «Имитация» и некоторых других создано в ЦФМ. Некоторые результаты исследований, связанных с построением алгебраических и стохастических фракталов, представлены на рисунке 3. В рамках этой статьи, мы стремимся лишь обозначить подходы к моделированию и не имеем возможности обсудить интерпретации приведённых изображений.

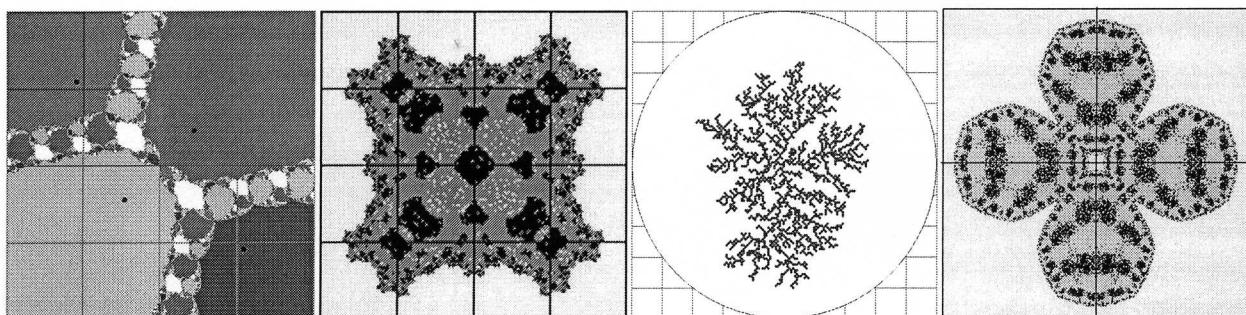


Рисунок 14. Некоторые результаты работы фракталопостроителей «Менталофрактал», «Демофрактал», «Имитация»

В-третьих, геометрические фракталы являются удобной эвристической метафорой для описания самоподобных социальных и политических структур, а также логики их развития. Геометрическими фракталами называют фигуры, возникающие в результате повторения одного и того же графического элемента (т.н. генератора фрактала) бесконечное количество раз во всё уменьшающемся масштабе. Примером такой фигуры может служить фрактал Решето Серпински (рисунок 1) или Снежинка Коха (рисунок 4). Поскольку генератор фрактала повторяется бесконечное число раз, то, теоретически, Решето Серпински, состоящее из треугольных «вырезок» из базового треугольника имеет нулевую площадь; а Снежинка Коха, которая формируется «пристраиванием» треугольных «наростов» к каждой грани, имеет бесконечную длину периметра в ограниченном пространстве.

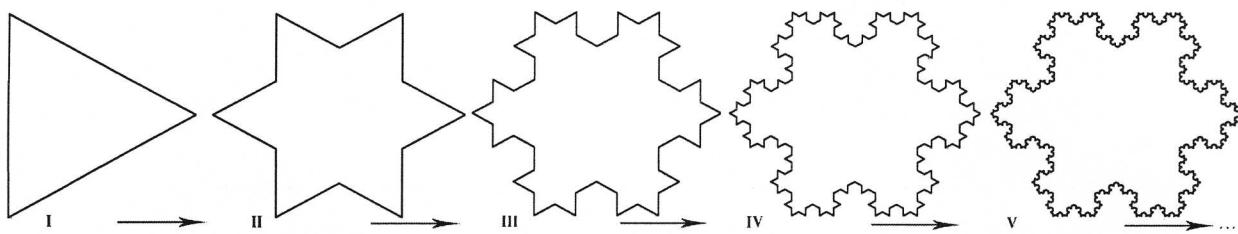


Рисунок 15. Начальные этапы построения Снежинки Коха

Метафора фрактала, которому свойственна масштабная инвариантность, позволяет свести всё многообразие фактов, независимо от их масштаба, к определённой закономерности, которую можно представить как генератор фрактала. При этом качественное единство базовой закономерности не противоречит количественному разнообразию исследуемых фактов.

Использование метафор фракталов в исследовательском дискурсе во многих случаях является не просто изменением иллюстративного ряда, но сменой представлений о существе тех или иных явлений. Новая метафора позволяет иначе обобщить имеющиеся данные, иначе представляет функциональные связи между фактами, иначе описывает динамику процессов.

Вот как Дж. Глейк в своей популярной книге «Хаос: создание новой науки» описывает экспансию фрактальных метафор: «...В системе кровообращения поверхность с огромной площадью должна вместиться в ограниченный объем... Человеческое тело полно подобных хитросплетений. В тканях пищеварительного тракта одна волнистая поверхность “встроена” в другую. Легкие также являются примером того, как большая площадь “втиснута” в довольно маленькое пространство... Фрактальный подход,... предполагает рассмотрение структуры как целого через разветвления разного масштаба... Фрактальная организация лежит в основе устройства всего человеческого тела. Выяснилось, что и мочевыделительная система фрактальна по своей природе, равно как желчные протоки в печени, а также сеть специальных мышечных волокон, которые проводят электрические импульсы к сократимым мышечным клеткам сердца... С точки зрения Мандельброта,... фракталы, разветвляющиеся структуры, до прозрачности просты и могут быть описаны с помощью небольшого объема информации. Возможно, несложные преобразования, которые формируют [фрактальные] фигуры, заложены в генетическом коде человека. ДНК, конечно же, не может во всех подробностях определять строение бронхов, бронхиол, альвеол или пространственную

структурой дыхательного “древа”, однако она в состоянии запрограммировать повторяющийся процесс расширения и разветвления – а ведь именно таким путем природа достигает своих целей... Мандельброт естественным образом переключился с изучения “древа” дыхательного и сосудистого на исследование самых настоящих деревьев, которые ловят солнце и противостоят ветрам, деревьев с фрактальными ветвями и листьями. А биологи-теоретики начали подумывать о том, что фрактальное масштабирование не просто широко распространенный, но универсальный принцип морфогенеза. Они утверждали, что проникновение в механизмы кодирования и воспроизведения фрактальных моделей станет настоящим вызовом традиционной биологии» [5, с. 142 – 146].

Наконец, в-четвёртых, средства фрактальной геометрии позволяют анализировать *событийные ряды*. Многие процессы имеют фрактальный характер. Самый простой пример фрактального процесса – волна, покрытая рябью, то есть более мелкими волнами, которые в свою очередь также покрыты рябью и т.д. Волнообразный вид графиков ключевых процессов в социально-политической сфере, естественным образом, наводит на мысль о цикличности этих процессов. Можно предположить, что (в пространстве) фрактальным структурам соответствуют (во времени) фрактальные процессы их жизнедеятельности – многомерные, сложные многоволновые циклы, спирали в фазовом пространстве и т.п. Фрактальность процессов становления и эволюции тех или иных систем можно трактовать как следствие (или, возможно, - причину) фрактального устройства самих систем.

Обратим внимание, что процесс, моделируемый в фазовом пространстве как совокупность результатов итераций «фрактальной» формулы, будет, как правило, иметь вид закручивающейся спирали, сходящейся к аттрактору (если моделируемый процесс имеет аттрактор в каких-то видимых пределах, а не в бесконечности) (см. рисунок 5). Любопытен в данном случае не только тот факт, что сама спираль является фракталом. Заучивающимся спиралям в фазовом пространстве соответствуют в реальной жизни затухающие колебательные процессы. Как известно, многие социально-политические процессы имеют именно такой характер в том случае, если социальная (или политическая) система стабилизируется. «Раскручивающейся» спирали с аттрактором в бесконечности (в фазовом пространстве) соответствуют (в реальном мире) колебательные процессы с увеличивающейся амплитудой, которые приводят к патологической дестабилизации и разрушению системы.

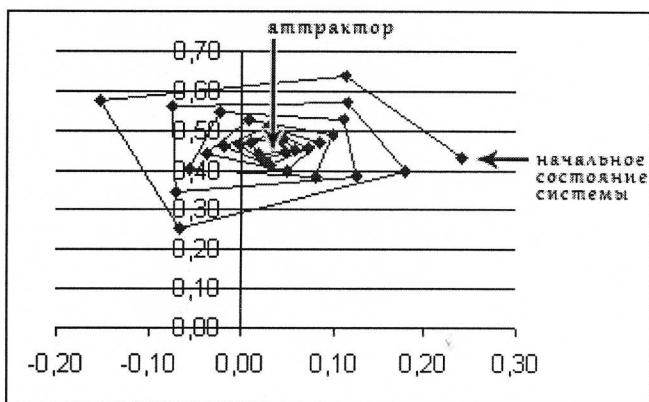


Рисунок 16. Один из результатов итераций формулы Мандельброта

Приведённые выше модели представляют собой «не столько точное отображение всей исторической действительности, сколько функциональное (и функционирующее в качестве компьютерной модели) обобщение нескольких факторов – обобщение, которое в таком

виде может использоваться в обобщениях более высокого порядка» [8, с. 52]. Если модель хорошо калибрована и верифицирована, то возникает возможность проводить компьютерные эксперименты с виртуальными копиями реальных объектов и процессов. Поскольку, как правило, мы не имеем возможности произвольно экспериментировать с социальными и политическими явлениями, то их модели можно использовать как своего рода «эвристическую машину» для производства гипотез, выявления потенциалов и для прогнозирования. Кроме того, помимо собственно математического моделирования, фрактальная геометрия предоставляет прекрасный понятийный аппарат для развития некоторых концептуальных представлений о социальных и политических феноменах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Frame, M.L. & Mandelbrot, B.B. Fractals, Graphics and Mathematical Education.* Washington DC: Mathematical Association of America & Cambridge UK: The University Press, 2002.
2. *Mandelbrot, B.B. Fractals: Form, Chance, and Dimension.* San Francisco CA and Reading UK: W. H. Freeman & Co. 1977.
3. *Mandelbrot, B.B. The Fractal Geometry of Nature.* New York US and Oxford UK: W.H. Freeman and Company. 1982.
4. *Бородкин Л.И.* Методология анализа неустойчивых состояний в политико-исторических процессах // Международные процессы. – 2005. – №1.
5. *Глейк Дж.* Хаос: создание новой науки. СПб.: Амфора, 2001.
6. *Жиков В.В.* Фракталы // Соросовский образовательный журнал. Математика. – 1996. – № 12. – С. 109-117.
7. *Жуков Д.С., Лямин С.К.* Метафоры фракталов в общественно-политическом знании. Тамбов, 2007.
8. *Жуков Д.С., Лямин С.К.* Моделирование исторических явлений и процессов средствами фрактальной геометрии // Информационный бюллетень Ассоциации "История и компьютер". – 2006. – № 34.
9. *Жуков Д.С., Лямин С.К.* Журнал общественной прогностики «Ineternum»: перспективы // Ineternum. – 2009. – № 1. – С. 29 – 45.
10. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия Природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
11. *Морозов А.Д.* Введение в теорию фракталов. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 1999.